(1)

المحاضرة 4

لتكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية

① $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, g(t)\, dt$

② $f(x) = \int_a^b k(x,t)\, \omega(t)\, dt$ ونفرض أن

علماً أن $\omega(t)$ تابع لـ t فقط

ولنفرض أن λ ليست عدداً مميزاً

(ليست قيمة خاصة) عندئذ اثبت أن حل

هذه المعادلة يعطى بالدستور التالي

$g(x) = \int_a^b R(x,t,\lambda)\, \omega(t)\, dt$

البرهان: حل المعادلة ① بالاعتماد على الدستور

الحالي يعطى بالدستور التالي

$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, f(t)\, dt$

نبدل كل $f(x)$ بما يساويها

$g(x) = \int_a^b k(x,t)\, \omega(t)\, dt + \lambda \int_a^b \int_a^b R(x,T,\lambda)\, k(T,T_1)\, \omega(T_1)\, dT_1\, dt$

$= \int_a^b k(x,t)\, \omega(t)\, dt + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b k(T_1,T)\, R(x,T_1,\lambda)\, dt_1\right] dt\, \omega(t)\, dt$

حيث يتم تبديل في التكامل الثاني كل T بـ T_1

وكل T_1 بـ T نبدل داخل القوس

~~بالاعتماد على النظرية ...~~

$\lambda \int_a^b k(T_1,T)\, R(x,T_1,\lambda)\, dt_1 = R(x,T,\lambda) - k(x,T)$

بالتالي نحصل على

$g(x) = \int_a^b k(x,T)\, \omega(t)\, dT + \int_a^b \left[R(x,T,\lambda) - k(x,T)\right] \omega(T)\, dt$

بجمع الحدود المتشابهة نحصل على

$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\, \omega(t)\, dt$

$g(x) = e^{2x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}$

$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-}$

$= e^{2x} + \frac{}{1-}$

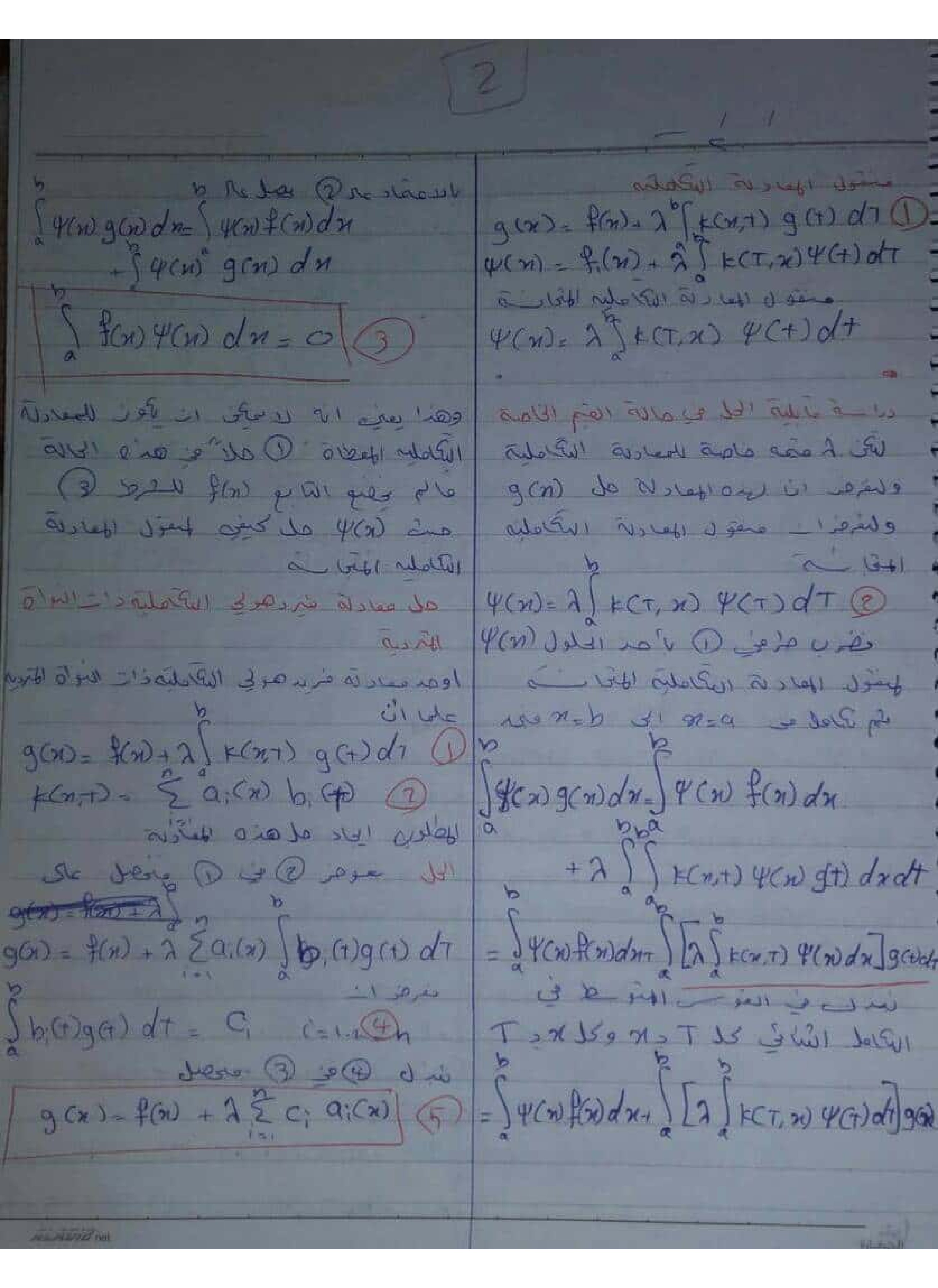
$= e^{2x} + \frac{}{1-}$

$= e^{2x} +$

المواصفة نحل

من الصفر نقل

$1-\lambda=0 \;=$



محول المعادلة التكاملية

$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, g(t)\, dt$ (1)

$\psi(x) = f_1(x) + \bar{\lambda} \int_a^b k(T,x)\, \psi(t)\, dT$

محول المعادلة التكاملية المتجانسة

$\psi(x) = \lambda \int_a^b k(T,x)\, \psi(t)\, dt$

دراسة قابلية الحل في حالة القيم الخاصة

لتكن λ قيمة خاصة للمعادلة التكاملية ولنفرض ان لهذه المعادلة حل $g(x)$ ولنفرض محول المعادلة التكاملية المتجانسة

$\psi(x) = \lambda \int_a^b k(T,x)\, \psi(T)\, dT$ (2)

نضرب طرفي (1) بأحد الحلول $\psi(x)$ لمحول المعادلة التكاملية المتجانسة ثم نكامل من $x=a$ الى $x=b$

$\int_a^b \psi(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b \psi(x)\, f(x)\, dx + \lambda \int_a^b \int_a^b k(x,t)\, \psi(x)\, g(t)\, dx\, dt$

$= \int_a^b \psi(x) f(x)\, dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b k(x,T)\, \psi(x)\, dx\right] g(t)\, dt$

نبدل في العوض المتوضع في التكامل الثاني كل T بـ x وكل x بـ T

$= \int_a^b \psi(x) f(x)\, dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b k(T,x)\, \psi(T)\, dT\right] g(x)$

بالاستفادة من (2) يكون

$\int_a^b \psi(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b \psi(x)\, f(x)\, dx + \int_a^b \psi(x)\, g(x)\, dx$

$\int_a^b f(x)\, \psi(x)\, dx = 0$ (3)

وهذا يعني انه لا يمكن ان يكون للمعادلة التكاملية المعطاة (1) حلاً في هذه الحالة ما لم يخضع التابع $f(x)$ للشرط (3) حيث $\psi(x)$ حل كيفي لمحول المعادلة التكاملية المتجانسة

حل معادلة فريدهولم التكاملية ذات النواة المتردية

اوجد معادلة فريدهولم التكاملية ذات النواة المتردية على ان

$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, g(t)\, dt$ (1)

$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t)$ (2)

المطلوب ايجاد حل هذه المعادلة

الحل: نعوض (2) في (1) فنحصل على

~~$g(x) = f(x) + \lambda \int$~~

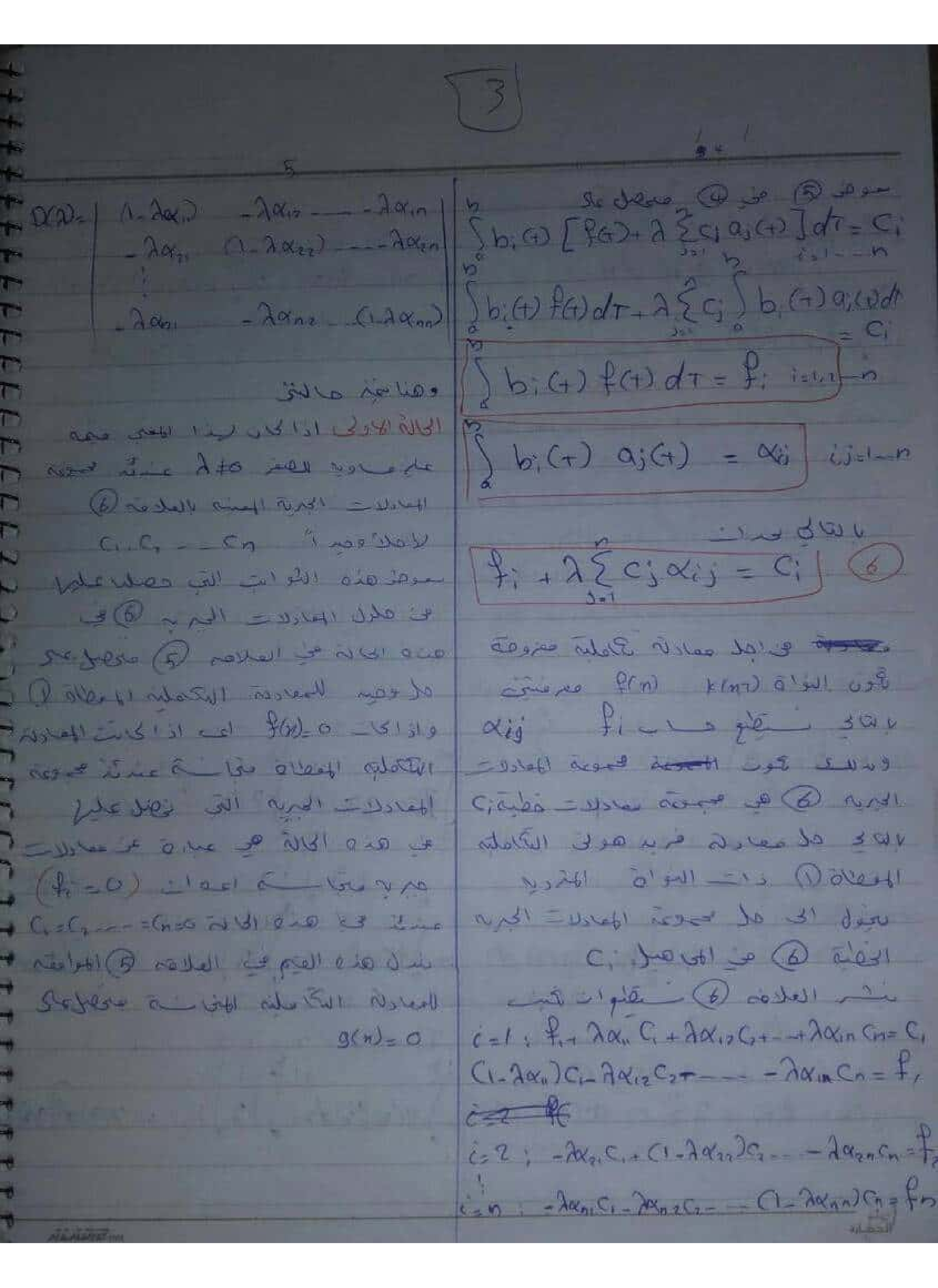
$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(t)\, g(t)\, dt$

نفرض ان

$\int_a^b b_i(t)\, g(t)\, dt = c_i \quad i = 1, \dots, n$ (4)

نبدل (4) في (3) فنحصل

$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x)$ (5)



سوف (5) في (4) فنحصل على

$$\int_a^b b_i(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j a_j(t)\right]dt = c_i \qquad i=1,\dots,n$$

$$\int_a^b b_i(t)f(t)\,dt + \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j\int_a^b b_i(t)a_j(t)\,dt = c_i$$

$$\int_a^b b_i(t)f(t)\,dt = f_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\int_a^b b_i(t)\,a_j(t) = \alpha_{ij} \qquad i,j=1,\dots,n$$

بالتالي نجد ان

$$f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_{ij} = c_i \qquad (6)$$

~~[illegible]~~ في ايجاد معادلة تكاملية معروفة تكون النواة $k(x,t)$ معرفتين $f(x)$ بالتالي نستطيع حساب f_i α_{ij} وبذلك تكون ~~المجموعة~~ مجموعة المعادلات الجبرية (6) هي مجموعة معادلات خطية c_i بالتالي حل معادلة فريدهولم التكاملية المعطاة (1) ذات النواة المنحلة يحول الى حل مجموعة المعادلات الجبرية الخطية (6) في المجاهيل c_i

ننشر العلاقة (6) نستطيع كتب

$i=1$; $f_1+\lambda\alpha_{11}c_1+\lambda\alpha_{12}c_2+\dots+\lambda\alpha_{1n}c_n=c_1$

$(1-\lambda\alpha_{11})c_1-\lambda\alpha_{12}c_2-\dots-\lambda\alpha_{1n}c_n=f_1$

~~$i=2$ f_2~~

$i=2$; $-\lambda\alpha_{21}c_1+(1-\lambda\alpha_{22})c_2-\dots-\lambda\alpha_{2n}c_n=f_2$

$\vdots$

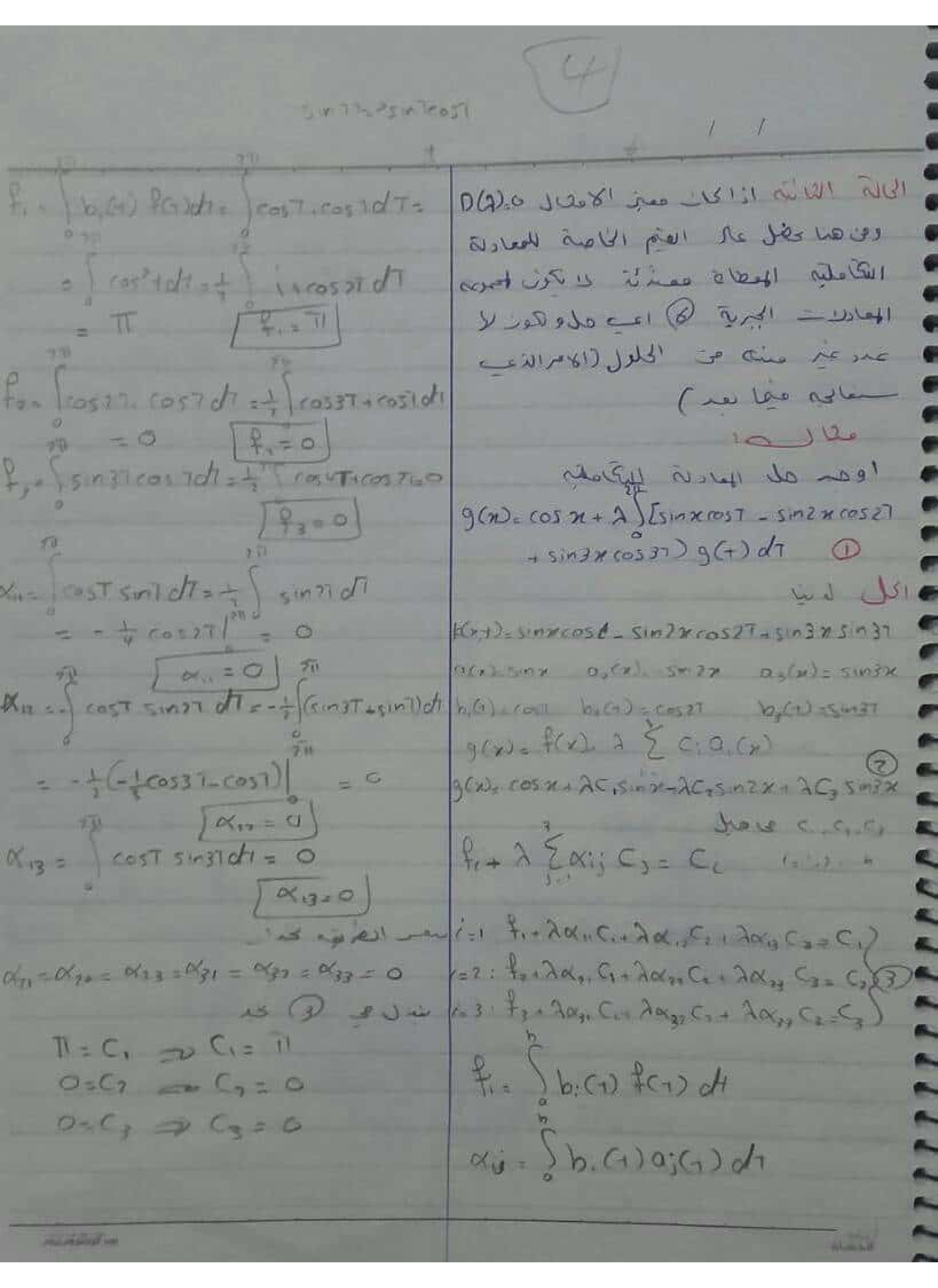
$i=n$; $-\lambda\alpha_{n1}c_1-\lambda\alpha_{n2}c_2-\dots(1-\lambda\alpha_{nn})c_n=f_n$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \cdots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \cdots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

وهنا نميز حالتين

الحالة الاولى اذا كان لدينا المعين محدد غير مساوي للصفر $\lambda\neq0$ عندئذ مجموعة المعادلات الجبرية المعطاة بالعلاقة (6) لها حل وحيد $c_1,c_2,\dots,c_n$ سوف هذه الثوابت التي حصلنا عليها من حل المعادلات الجبرية (6) في هذه الحالة في العلاقة (5) فنحصل على حل وحيد للمعادلة التكاملية المعطاة (1) واذا كان $f(x)=0$ اي اذا كانت المعادلة التكاملية المعطاة متجانسة عندئذ مجموعة المعادلات الجبرية التي نحصل عليها في هذه الحالة هي عبارة عن معادلات جبرية متجانسة اي ان $(f_i=0)$ عندئذ في هذه الحالة $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ نبدل هذه القيم في العلاقة (5) الموافقة للمعادلة التكاملية المتجانسة فنحصل على

$g(x)=0$



4

$\sin 2T = 2 \sin T \cos T$

الحالة الثالثة اذا كان محدد الاهمال $D(\lambda)=0$ وفي هنا نحصل على القيم الخاصة للمعادلة التكاملية المعطاة متجانسة لا تكون لمجموعة المعادلات الجبرية ② اي حل وتكون لا عدد غير منته من الحلول (الامر الذي سنأتي فيها بعد)

مثال:

اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} [\sin x \cos T - \sin 2x \cos 2T + \sin 3x \cos 3T]\, g(T)\, dT \quad ①$$

الحل لدينا

$$K(x,T) = \sin x \cos T - \sin 2x \cos 2T + \sin 3x \sin 3T$$

$a_1(x) = \sin x \quad a_2(x) = \sin 2x \quad a_3(x) = \sin 3x$

$b_1(T) = \cos T \quad b_2(T) = \cos 2T \quad b_3(T) = \sin 3T$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum C_i a_i(x) \quad ②$$

$$g(x) = \cos x + \lambda C_1 \sin x - \lambda C_2 \sin 2x + \lambda C_3 \sin 3x$$

C_1, C_2, C_3 نحصل عليها

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} C_j = C_i \quad i = 1, 2, \dots n$$

$i=1: \; f_1 + \lambda\alpha_{11} C_1 + \lambda\alpha_{12} C_2 + \lambda\alpha_{13} C_3 = C_1$

$i=2: \; f_2 + \lambda\alpha_{21} C_1 + \lambda\alpha_{22} C_2 + \lambda\alpha_{23} C_3 = C_2 \quad ③$

$i=3: \; f_3 + \lambda\alpha_{31} C_1 + \lambda\alpha_{32} C_2 + \lambda\alpha_{33} C_3 = C_3$

$$f_i = \int_a^b b_i(T) f(T)\, dT$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(T) a_j(T)\, dT$$

$$f_1 = \int_0^{2\pi} b_1(T) f(T)\, dT = \int_0^{2\pi} \cos T \cdot \cos T\, dT = \int_0^{2\pi} \cos^2 T\, dT = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos 2T\, dT = \pi$$

$\boxed{f_1 = \pi}$

$$f_2 = \int_0^{2\pi} \cos 2T \cos T\, dT = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 3T + \cos T\, dT = 0$$

$\boxed{f_2 = 0}$

$$f_3 = \int_0^{2\pi} \sin 3T \cos T\, dT = \frac{1}{2}\int \cos 4T + \cos 2T = 0$$

$\boxed{f_3 = 0}$

$$\alpha_{11} = \int_0^{2\pi} \cos T \sin T\, dT = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2T\, dT = -\frac{1}{4}\cos 2T \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\boxed{\alpha_{11} = 0}$

$$\alpha_{12} = \int_0^{2\pi} \cos T \sin 2T\, dT = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin 3T + \sin T)\, dT$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3T - \cos T\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\boxed{\alpha_{12} = 0}$

$$\alpha_{13} = \int_0^{2\pi} \cos T \sin 3T\, dT = 0$$

$\boxed{\alpha_{13} = 0}$

بنفس الطريقة نجد أن

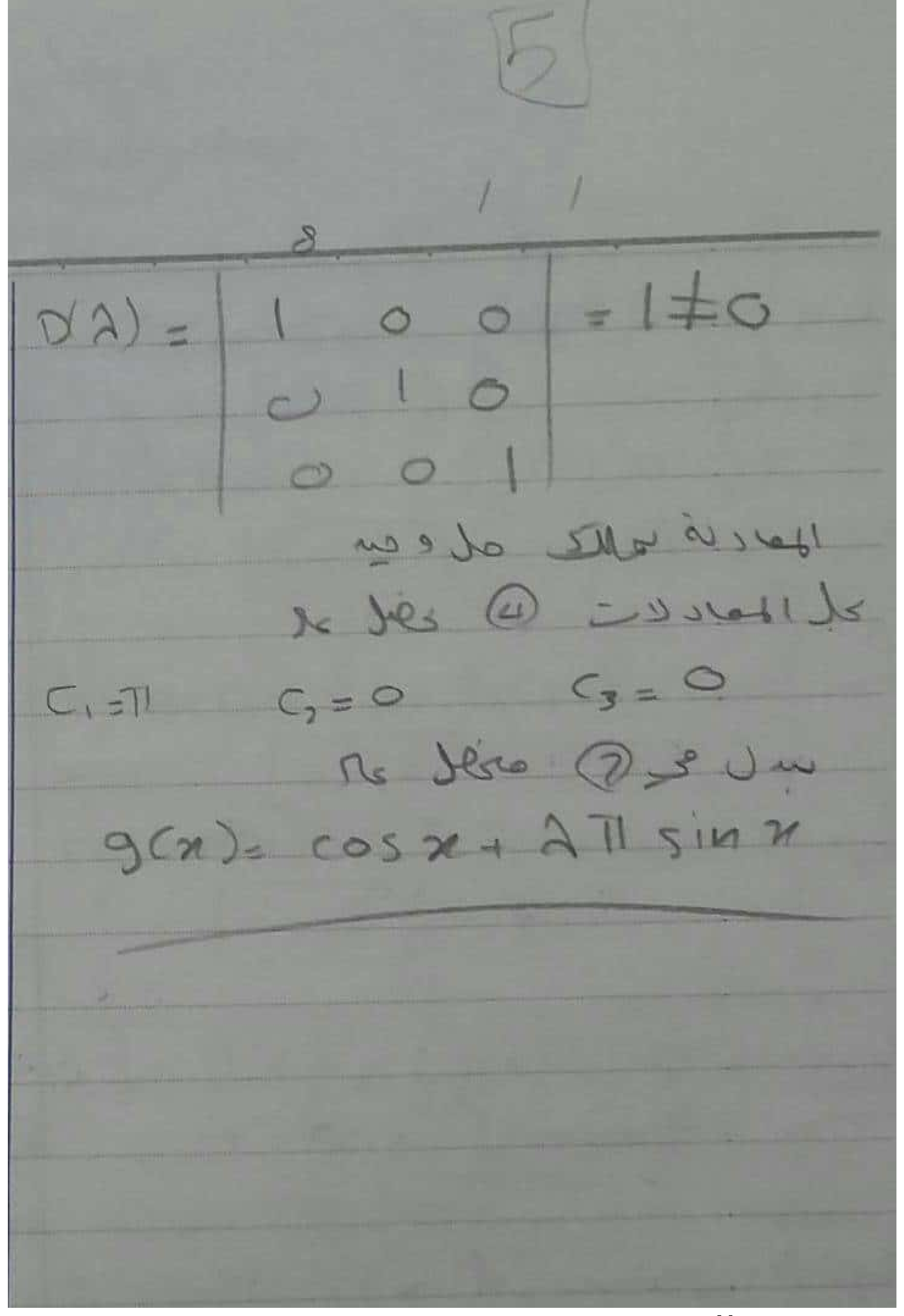
$$\alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0$$

نعوض في ③ نجد

$\pi = C_1 \Rightarrow C_1 = \pi$

$0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$0 = C_3 \Rightarrow C_3 = 0$



5

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

المعادلة تملك حل وحيد

كل المعادلات ④ تحقق x

$c_1 = \pi$ $c_2 = 0$ $c_3 = 0$

بس نعوض ⑦ نحصل على

$g(x) = \cos x + \lambda\pi \sin x$